EXTENSION AUX CYCLES SINGULIERS DU THEOREME DE KHOVANSKI-VARCHENKO.

par Abderaouf Mourtada

Universit de Bourgogne, I.M.B.
U.M.R. 5584 du C.N.R.S., U.F.R. des Sciences et Techniques
9, avenue Alain Savary, B.P. 47 870, 21078 Dijon Cedex.
E-mail: mourtada@u-bourgogne.fr

Abstract._Let $\omega = dH$ be a hamiltonian 1-form in the real plane, of degree d. In [K][V], Khovanski and Varchenko proved that for any algebraic unfolding ω_ν of ω, of degree d', with non-vanishing Abelian integrals along real cycles of ω, the number of limit cycles of ω_ν, which born from regular real cycles of ω,is bounded by some function of the degres d and d'. In this paper, we extend this result to singular real cycles (polycycles), assuming that H is a Morse function on $\mathbb{C}^2$. We deduce in particular the following result: if $d = d'$ and H generic at infinity, then the number of limit cycles of ω_ν in the real plane, is bounded by a function of the degre d._

Introduction.

Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré $d+1$, dont les points critiques de son complexifi sont de Morse (les valeurs critiques correspondantes ne sont pas forcément distinctes deux à deux). Soit H_{d+1} le bloc homogène de degré $d+1$ dans H. On suppose que

$(*)$ H_{d+1} est un produit de facteurs $\mathbb{C}$-linéaires, deux à deux distincts.

Soit $\nu = (\epsilon, v) \in \mathbb{R}^{(d+1)(d+2)}$ et soit $\omega_\nu = dH + \epsilon\eta_v$ un déploiement algébrique de degré d. Soit $(\mathcal{C}_i)$ la famille des couronnes de cycles réels de la fibration H et soit $I_i(\eta_0)$ l'intégrale de la 1-forme η_0 le long des cycles de la couronne $\mathcal{C}_i$. On suppose que

$(**)$ $I_i(\eta_0) \not\equiv 0$ pour tout i.

Le but de ce travail est d'établir le résultat suivant

Théorème. *Il existe un entier $N(d)$ ne dépendant que du degré d tel que, pour ν suffisament petit, la 1-forme ω_ν a au plus $N(d)$ cycles limites (comptés avec multiplicité) dans le plan réel.*

Le nombre de ces couronnes $\mathcal{C}_i$ est majoré par une fonction du degré ($< 4d^2$). Le théorème se déduit donc de la

Proposition. *Il existe un entier $n(d)$ tel que pour toute couronne $\mathcal{C}$ de cycles réels de H, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{H,\eta_0}$ de $\overline{\mathcal{C}}$ dans le disque de Poincaré tel que, pour ν suffisament petit, ω_ν possède au plus $n(d)$ cycles limites (comptés avec multiplicité) dans $\mathcal{V}_{H,\eta_0}$.*

Soit $\{\delta(t);\ t \in]t_1, t_2[\}$ la famille des cycles réels constituant $\mathcal{C}$, le cycle $\delta(t)$ est une composante connexe de la fibre réelle $\{H = t\}$; et les réels t_j sont des valeurs critiques de H (si $\neq \infty$). Soit $I(t) = I_{\delta(t)}(\eta_0)$ l'ntégrale abélienne de η_0 sur le cycle $\delta(t)$. Dans [K][V], Khovanski et Varchenko ont montré que le nombre et la multiplicité de zéros de l'intégrale I sur l'intervalle $]t_1, t_2[$, sont majoré par une fonction du degré $n_1(d)$. Donc, par le classique lemme de perturbation [AL], le nombre et la multiplicité des cycles limites de ω_ν qui naissent à partir des cycles δ, sont majorés par $n_1(d)$. Le bord de la couronne $\mathcal{C}$ dans le disque de Poincaré est l'union de deux composantes connexes. Par l'hypothse $(*)$, chacune de ces composantes est, ou bien un cycle singulier Γ_k, à k singularités (auquel cas $\Gamma_k \subset \{H = t_j\}$), ou bien un cycle régulier Γ_0 sur l'équateur (auquel cas $t_j = \infty$). Si $t_j \neq \infty$, il est connu (cf. [AV] par exemple), que l'intégrale Ablienne I admet un développement asymptotique logarithmique au voisinage de t_j: $I(t) = \sum_{n,m \leq n} a_{n,m}(t - t_j)^n(\log(t - t_j))^m$. On appelle **multiplicité algébrique** de I en t_j, et on la note $ma(I, t_j)$ le plus petit entier n tel que $a_{n,m} \neq 0$ pour un certain m. Elle coincide avec la multiplicité classique si I est analytique au voisinage de t_j. Si $t_j = \infty$, on montre dans le 2, que la fonction $J(\tau) = \tau^{d+2} I(\tau^{-(d+1)})$ est analytique au voisinage de 0. Dans ce cas, on note $ma(I, \infty) = ma(J, 0)$. La proposition est alors une conséquence des deux lemmes suivants

Lemme 1. *Il existe un entier $M(d)$ tel que pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $ma(I, t) \leq M(d)$.*

Lemme 2. *Il existe un entier $n_2(d, ma(I, t_j))$ et un voisinage V_{H,η_0} de Γ_k dans le disque de Poincaré tels que, pour ν suffisament petit, ω_ν a au plus n_2 cycles limites (comptés avec multiplicité) dans V_{H,η_0}.*

La rfrence la plus gnrale sur les rsultats concernant les intgrales Abliennes est [R]. Dans [G3], Gavrilov montre un rsultat globale (du type du thorme ci-dessus), dans le cas $d = 3$, et sans l'hypothse $(**)$. Dans ce cas, la monodromie de la fibration H est **transitive**, et les seuls cycles singuliers rencontrs sont du type Γ_1. La preuve de [G3] s'appuie sur un thorme de Roussarie [Ro], qui est un cas particulier du thorme principal 2.1 ci-dessous. Ce thorme est bas sur le thorme IVB1 de [Mo]. Une gnralisation de la situation dans [G3], est la suivante: on suppose que la fibration de Morse H satisfait l'hypothse $(*)$, et qu'elle est de monodromie transitive (le groupe fondamental de $\mathbb{C} \setminus \{$les valeurs critiques de $H\}$ agit transitivement sur le

groupe d'homologie de la fibre gnrique de H). Dans ce cas, on peut montrer un thorme global (o le voisinage ne dpend que de H), en utilisant les rsultats de [B], et le thorme 2.1. Dans le cas gnral (monodromie non transitive), il est raisonnable d'tudier d'abord les dploiements de couronnes de cycles rguliers, dans l'esprit des derniers travaux de Gavrilov ([G4]...). La jonction vers les cycles singuliers se fera via le thorme IVC1 de [Mo].

1. Démonstration du lemme 1.

Soit $H : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale de degré $d+1$ dont les points critiques $(m_{i,j})_{j=1,\dots,p \ i=1,\dots,\ell_j}$ sur $\mathbb{C}^2$ sont de Morse et qui satisfait à l'hypothèse $(*)$ (donc par le théorème de Bezout $\sum_{j=1,\dots,p} \ell_j = d^2$). Notons $T = \{t_1, \dots, t_p\}$ l'ensemble des valeurs critiques. Soit $V_t = H^{-1}(t)$ et $\overline{V}_t \subset \mathbb{C}P^2$ sa clture projective. Elle coupe transversalement la ligne à l'infini $\mathbb{C}P^1$ en $d+1$ points indépendants de t. Pour $t \in \mathbb{C} \setminus T$, la fibre régulière V_t est **d'homologie évanescente et bornée** de dimension d^2 sur $\mathbb{Z}$ ([AV], [I1], [I2],). Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, soit $\gamma_j \subset \mathbb{C}$ un petit lacet autour de la valeur critique t_j et $h_j : H_1(V_t, \mathbb{Z}) \to H_1(V_t, \mathbb{Z})$ l'opérateur de monodromie "classique" correspondant ($t \in \gamma_j$). C'est un produit d'opérateurs de monodromie de Picard-Lefschetz ([AV], [G1], [G2]): en effet, soit $H_\lambda : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une famille à un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$ de fonctions polynomiales de degré $d+1$ telle que $H_0 = H$ et pour $\lambda \neq 0$ suffisament petit, les valeurs critiques $(t_{i,j}(\lambda))$ de H_λ soient distinctes deux à deux. Or, pour $t \in \gamma_j$, les fibres V_t et $V_{\lambda,t} = H_\lambda^{-1}(t)$ sont isomorphes, et l'opérateur de monodromie de H_λ correspondant au lacet γ_j est le produit des opérateurs de monodromie de Picard-Lefschetz $h_{i,j}$ associés aux valeurs critiques $t_{i,j}$. Soit $\Delta_{i,j} \in H_1(V_t, \mathbb{Z})$ le cycle évanescent au point critique $m_{i,j}$ et $c \in H_1(V_t, \mathbb{Z})$. Un calcul direct donne

$$h_j(c) = c + \sum_{i=1}^{\ell_j} a_i(c) \Delta_{i,j} \tag{1}$$

les entiers $a_i(c) \in \mathbb{Z}$ dépendent des indices d'intersection des cycles c et $\Delta_{i,j}$.

A la fibration globale de Milnor H au dessus de $\mathbb{C} \setminus T$, on associe la fibration homologique globale de Milnor E de même base et dont les fibres E_t sont les espaces homologiques $H_1(V_t, \mathbb{C})$. Soit η une 1-forme algébrique complexe sur $\mathbb{C}^2$ de degré$\leq$ d. Si δ est une section locale constante de E, on note $I_\delta(t)$ l'intégrale Abélienne de η sur le cycle $\delta(t) \subset V_t$. Il est connu ([AV]) que chaque branche de I_δ est analytique au voisinage de chaque point de $\mathbb{C} \setminus T$. L'homologie de H étant bornée, on a pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$

$$I_\delta(t) = O(1) \tag{2}$$

sur le germe de tout secteur S_j basé au point t_j. Et, d'après [Ma], [Y], on a

$$I_\delta(t) = O(t) \tag{3}$$

sur le germe de tout secteur S_∞ basé au point $\infty \in \mathbb{C}P^1$. Dans [Y], on trouve aussi une estimation moins fine, mais tablie dans le cas général où H ne satisfait

pas à l'hypothèse ($*$). Sa preuve est basée sur des notions élémentaires de théorie de l'élimination pour la localisation des points de ramification associés aux courbes algébriques affines V_t.

La ramification de I_δ au point t_j s'obtient grâce à la monodromie h_j donnée par (1): par la définition des cycles évanescents $\Delta_{i,j}$ aux points critiques de Morse $m_{i,j}$, les intégrales $I_{\Delta_{i,j}}$ sont analytiques aux voisinages de t_j et tendent vers 0 quand t tend vers t_j ([AV]). Soit

$$J_\delta(t) = \frac{1}{2i\pi}\Big(\sum_{i=1,\dots,\ell_j} a_i(\delta) I_{\Delta_{i,j}}(t)\Big)\log(t-t_j)$$

en appliquant la monodromie h_j au cycle $\delta(t)$, on obtient que la fonction

$$f_\delta(t) = I_\delta(t) - J_\delta(t) \tag{4}$$

est uniforme sur un voisinage pointé de t_j, et par (2) elle est analytique au voisinage de t_j.

Soit $\{\delta_1, \dots, \delta_{d^2}\}$ une base de sections locales constantes de E et soit $W(t)$ la matrice wronskienne des intégrales $I_{\delta_j}(t)$ de rang ℓ. Soit $w(t)$ un wronskien d'ordre ℓ non identiquement nul. Par une démarche classique utilisant (2), (3) et (4) (cf. [I1], [I2], [I3], [Ma], [Y]), w est une fonction rationnelle dont les pôles appartiennent à T et dont les degrés du numérateur et du dénominateur sont majorés par une fonction du degré d. Ainsi, si δ est une section locale constante de E telle que $I_\delta \not\equiv 0$, la multiplicité algébrique $ma(I_\delta, t)$ en tout point $t \in \mathbb{C}$, est majorée par une fonction du degré d. Soit M le plus grand des entiers m tels que la fonction $t^{m-1} I_\delta(t)$ soit bornée sur un certain secteur S_∞. Le même type de raisonnement appliqué à $w(t)$ montre que M est majorée par une fonction du degré d, et ceci finit la preuve du lemme. $\square$

2. Démonstration du lemme 2.

Soient X_0 et X_ν les champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ associés aux 1-formes dH et ω_ν. Commençons la preuve dans le cas d'un cycle régulier à l'infini. Soit $\mathcal{C} = \{\delta(t);\ t \in]t_1, +\infty[\}$ une couronne de cycles réels $\delta(t)$ de H. Soit $\overline{X}_0$ et $\overline{X}_\nu$ les prolongements des champs X_0 et X_ν sur $\mathbb{C}P^2$. Le champ $\overline{X}_0$ a un cycle régulier $\Gamma_0 = \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$ qui ne porte pas de l'holonomie. Soit $(u = 1/x, v = y/x)$ une carte sur $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$ et σ le germe en 0 de la transversale $\{v = 0\}$. Le champ X_ν étant de degré d, son prolongement $\overline{X}_\nu$ admet une application de retour $p_{1,\nu}$ sur σ qui est analytique dans les coordonnées (u, ν)

$$p_{1,\nu}(u) = u + \epsilon(K(u) + O(\nu)) \tag{5}$$

D'un autre côté, considérons la coordonnée réelle $\tau = t^{-1/(d+1)}$ sur la semi-transversale $\sigma^+ = \mathbb{R}^{+*} \cap \sigma$. L'application de retour $p_{2,\nu}$ sur σ^+ s'obtient en intégrant la 1-forme $d(H^{-1/(d+1)})$ le long des orbites du champ X_ν. Un calcul direct donne

$$p_{2,\nu}(\tau) = \tau + \epsilon(\tau^{d+2} I(\tau^{-(d+1)}) + O(\nu)) \tag{6}$$

où $I(t) = I_{\delta(t)}(\eta_0)$ est l'intégrale de la 1-forme η_0 le long du cycle $\delta(t)$. Maintenant, la relation $\tau^{-(d+1)} = H(1/u, 0)$ et l'hypothèse $(*)$ montrent qu'il existe un difféomorphisme g analytique en 0 tel que $\tau = g(u)$. Par conséquent, en conjuguant (5) à (6) par g, on obtient que la fonction $J(\tau) = \tau^{d+2} I(\tau^{-(d+1)})$ est analytique en 0, et ceci conclut la preuve dans ce cas.

Soit maintenant $\mathcal{C} = \{\delta(t);\ t \in]0, t_2[\}$ une couronne de cycles réels de H et $\Gamma_k = \partial\mathcal{C} \cap \{H = 0\}$ un cycle singulier à k singularité; il est compact d'aprs l'hypothse $(*)$. S'il est réduit à un point (un centre), l'intégrale Abélienne et l'application de retour correspondantes sont analytiques en 0. La preuve est alors similaire à celle donnée ci-dessus. Sinon, ses singularités sont des points de selle. Dans ce cas, la preuve est basée sur les ides générales développées dans le travail [Mo].

Dans [Mo], il est établi que le nombre et la multiplicité des cycles limites de ω_ν proches de Γ_k, sont uniformément majorés (cf. thorme 0, [Mo]). Il s'agit ici de montrer que ces majorants ne dépendent que du degré d. On reprend les notations de [Mo]. Soient $(x_1, \ldots, x_k)$ des coordonnées analytiques adéquates sur des transversales σ_j à Γ_k. Soit $\lambda_j(\nu)$ le germe qui dploie la j-imme connexion de Γ_k. L'application de transition (ou application de Dulac) du j-ièmme coin de Γ_k pour la 1-forme ω_ν, s'écrit

$$x_{j+1} = d_j(x_j, \nu) - \lambda_j(\nu) \quad \text{avec} \quad d_j(x_j, \nu) = x_j^{r_j}(1 + D_j(x_j, \nu))$$

où le germe D_j est induit par un élément de l'algèbre $QR\mathcal{H}^{1,(1,d'=(d+1)(d+2))}$ (cf. VA[Mo]), et où $r_j(\nu) = 1 + \mu_j(\nu)$ est le nombre caractéristique de la j-ièmme singularité de Γ_k. Si on note $g_j = d_j - x_{j+1}$ pour $j = 1, \ldots, k-1$, et $f = d_k - x_1 - \lambda_k$, alors l'application de retour de ω_ν sur la transversale σ_1 (par exemple!) s'écrit

$$p_{1,\nu}(x_1) = x_1 + f_{|\{g_1=\lambda_1, \ldots, g_{k-1}=\lambda_{k-1}\}} \tag{7}$$

(cf. paragraphe IVC4, [Mo]). Dans la coordonnée t sur σ_1, cette application de retour s'obtient en intégrant la 1-forme dH le long des orbites de ω_ν

$$p_{2,\nu}(t) = t + \epsilon(I(t) + O(\nu)) \tag{8}$$

où $I(t)$ est l'intégrale Abélienne de η_0 sur les cycles $\delta(t)$. D'aprs [AV], c'est un élément de l'algèbre convergente $QR\mathcal{H}^{1,0}_{cvg}$ (cf. IA[Mo]) . Cependant, le terme $O(\nu)$ n'est pas uniforme dans la variable t au voisinage de 0. L'écriture (7) de l'application de retour est donc la plus adaptée pour étudier le problème, et elle s'interprète géométriquement de la façon suivante: plaçons nous dans un voisinage U de 0 dans $(\mathbb{R}^{+*})^k \times \mathbb{R}^{d'}$ de coordonnées $(x = (x_j), \nu)$, et dans lequel les germes $g = (g_j)_{j=1,\ldots,k-1}$ et $\lambda = (\lambda_j)_{j=1,\ldots,k-1}$ sont raliss. La forme

$$d\nu_1 \wedge \cdots \wedge d\nu_{d'} \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{k-1}$$

ne s'annule pas sur U (en rduisant U si ncessaire). Soit χ la dérivation sur $(U, 0)$ d'intégrales premières $\nu_1, \ldots, \nu_{d'}, g_1, \ldots, g_{k-1}$, telle que $\chi x_1 = \prod x_j$. Soit $U_0 = \{(x, \nu) \in U;\ g(x, \nu) = \lambda(\nu)\})$, c'est une sous-varit analytique de U, invariante par

le flot de χ dans U. Le nombre de points fixes de l'application de retour $p_{1,\nu}$ est égale au nombre de composantes connexes de l'intersection de la fibre $f_{|U_0} = 0$, et de l'orbite de χ γ_ν correspondante aux valeurs $(\nu, \lambda(\nu))$ des intgrales premires de χ. La multiplicité de ces points fixes est majorée par l'indice de noethérianité de l'idéal différentiel restriction $I_{\chi,f|U_0}$.

Le cadre gnral de cette situation est le suivant (cf IVB, [Mo]): soient $k, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ et soient $(x, \alpha = (\mu, \nu))$ des coordonnes analytiques locales sur $((\mathbb{R}^{+*})^k \times \mathbb{R}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}, 0)$. Soit un ouvert $U \in ((\mathbb{R}^{+*})^k \times \mathbb{R}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}, 0)$ et soit χ une dérivation d'Hilbert ralise sur U (cf. IVA, [Mo]), de dimension de non trivialité $k-1$, et d'intégrales premières non triviales $g = (g_1, \ldots, g_{k-1})$.

Soient $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$ les valeurs (coordonnées) des intégrales premières g et soit γ l'orbite de χ dans U, qui adhre 0, et le long de laquelle toutes les intégrales premières de χ sont nulles. C'est une orbite principale de χ dans U (cf. IB, [Mo]). On peut supposer, sans perte de gnralit, que U est le satur par le flot de χ (dans U!) d'une transversale analytique γ, qu'on note σ et qu'on munit des coordonnes analytiques (α, λ). Soit $\pi_\chi : U \to \sigma$ la projection intgrale (on note de la mme faon son germe aux points 0 et $\sigma \cap \gamma$).Soit $W_0 \subset \sigma$ un semi-analytique de $\mathbb{R}\{\alpha, \lambda\}$, qui adhre 0, et soit $U_0 = \pi_\chi^{-1}(W_0)$.

Soit $f \in QR\mathcal{H}^{k,q}$ ralis sur U, et soit $J_{\chi,f,\gamma} \subset \mathbb{R}\{\alpha, \lambda\}$ son idéal χ-transverse le long de γ, c'est la restriction de l'idéal différentiel $I_{\chi,f}$ à une transversale analytique à γ (cf. IB, [Mo]). On suppose que f satisfait à l'hypothèse $(H\lambda)$: il existe un entier N tel que $J_{\chi,f,\gamma} \supset \mathcal{M}_\lambda^N$ par restriction à W_0. Soit N_0 le plus petit de ces entiers N. D'après le théorème IVB1 de [Mo], le degré de la projection π_χ restreinte à la fibre nulle de $f_{|U_0}$, est fini. De plus, l'idéal différentiel $I_{\chi,f}$ est localement noethérien sur U_0. Notons $ind(I_{\chi,f|U_0})$ la borne supérieure de son indice de noethérianité sur un voisinage choisi de 0 dans U_0. Si $ma = ma(\chi, f)_0$ est la multiplicité algébrique du couple (χ, f) en 0 (voir ci-dessous), alors ce théorème se précise de la façon suivante

Thorme principal 2.1. *Il existe des fonctions universelles $N(ma, N_0, k, q_1)$ et $L(ma, N_0, k, q_1)$ telles que*

$$d\pi_{\chi|Z(f)\cap(U_0,0)} \leq N \quad et \quad ind(I_{\chi,f|U_0}) \leq L$$

Indiquons brièvement comment on déduit le lemme 2 du thorme 2.1 (cf. 2.2): soit (χ, f) le couple d'Hilbert (voir ci-dessous) associé au déploiement ω_ν au voisinage du cycle singulier Γ_k. En conjuguant (7) à (8), on montre que $N_0 = 1$ et $ma(\chi, f)_0 = ma(I(t), 0)$. Par le théorème de Bezout, les entiers k et q_1 sont majorés par une fonction du degré d.

2.1. Démonstration du thorme 2.1.

(a). Multiplicité algébrique généralisée et son uniformité.

Soit $f \in QR\mathcal{H}_{cvg}^{1,q=(q_1,q_2+\ell)}(x, \alpha = (\mu, \nu), u)$ et soit

$$\chi = x\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{j=1}^{\ell} s_j(\mu) u_j \frac{\partial}{\partial u_j}$$

avec $s_j(0) = 1$. L'orbite $\gamma_0 = \{(\alpha, u) = 0\}$ est principale dans un ouvert $U \in (\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{|q|}, 0)$. On suppose que f est ralise sur U, continue sur $\overline{U}$. Il est montré dans III[Mo] que f admet une multiplicité algébrique $ma(\chi, f)_0$ relativement à χ le long de γ_0: soient $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ les valeurs (coordonnes) des intgrales premires $L_j = x^{s_j} u_j$. Si $f = \sum_{p \in \mathbb{Z}} g_p$ est la série de f en blocs χ-homogènes et si on pose $f_n = \sum_{p \leq n} g_p$, la suite des idéaux χ-transverses $(J_{\chi, f_n, \gamma_0})_{n \geq n_0}$ de $\mathbb{R}\{\alpha, \lambda\}$ est croissante, et son indice de stationnarité (indépendant de $n_0 \in \mathbb{Z}^-$ suffisament grand en module) est la multiplicité algébrique $ma(\chi, f)_0$. Or chaque orbite $\gamma_m = \{(\mu, u) = 0,\ \nu = \nu_m\} \subset U$ est aussi principale dans un voisinage dans U, du point $m = (0, 0, \nu_m, 0)$ du bord $B_{1,0} = \{(x, \mu, u) = 0\} \cap \overline{U}$. Et, par le mme raisonnement que ci-dessus, le germe f_m admet aussi une multiplicité algébrique $ma(\chi_m, f_m)_m$ relativement à χ_m le long de γ_m (en considrant les idaux χ-transverses dans l'anneau $\mathbb{R}\{\mu, \nu - \nu_m, \lambda\}$). On note simplement $ma(\chi, f)_m$ cette multiplicit. La multiplicité algébrique positive associe est $ma^+(\chi, f)_m = \max\{ma(\chi, f)_m, 0\}$. Un résultat basique pour la suite est le

Lemme 2.1.1. *L'application $m \in B_{1,0} \mapsto ma^+(\chi, f)_m$ est semi-continue supérieurement.*

Preuve. En $m = 0$ par exemple. Par la dfinition de l'idal χ-transverse le long de γ_0, la multiplicité algébrique $ma(\chi, f)_0$ est majorée par l'indice de stationnarité de la suite croissantes des idéaux $(I_{\chi, f_n}(0))_{n \geq n_0}$ dans l'anneau $SB^{1,|q|}$. Notons $ma_0^+ = ma^+(\chi, f)_0$. Le germe $f_{ma_0^+}$ a le mme idal χ-transverse que f et sa multiplicit algbrique positive est ma_0^+. Donc, par le thorme principal IIIA1[Mo], on a l'inclusion

$$I_{\chi, f_{ma_0^+}}(0) \supset (x^{ma_0^+ + \epsilon}) \pi_\chi^*(J_{\chi, f, \gamma_0}) \quad \text{pour tout} \quad \epsilon > 0$$

o π_χ est (le germe en 0 de) la projection intgrale. Soit $h = f - f_{ma_0^+}$. On a $J_{\chi, h, \gamma_0} \subset J_{\chi, f, \gamma_0}$. Comme $f, h \in QR\mathcal{H}^{1,q}_{cvg}$, la remarque IIIA1[Mo] donne

$$(x^{n(f)} I_{\chi, h}(0) \subset \pi_\chi^*(J_{\chi, f, \gamma_0})$$

et donc

$$(x^{n(f) + ma_0^+ + \epsilon}) I_{\chi, h}(0) \subset I_{\chi, f_{ma_0^+}}(0)$$

Par consquent, il existe $L \in \mathbb{N}$ et $H_j \in SB^{1,|q|}$ tels que

$$x^{n(f) + ma_0^+ + \epsilon} h = \sum_{j=1}^{L} H_j \chi^j f_{ma_0^+}$$

En germifiant cette galit en tout point m du bord, voisin de 0, on obtient

$$(x^{n(f) + ma_0^+ + \epsilon}) I_{\chi, h}(m) \subset I_{\chi, f_{ma_0^+}}(m)$$

et par la définition de l'idéal χ-transverse le long de γ_m, on a $ma^+(\chi, f)_m \leq ma_0^+$. $\square$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et soient $(x, \rho, \alpha = (\mu, \nu))$ des coordonnes analytiques locales sur $((\mathbb{R}^{+*})^{k+p} \times \mathbb{R}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}, 0)$. Soit χ une dérivation d'Hilbert, de dimension de non trivialité $k-1$, et dont les intégrales premières non triviales sont

$$g_j(x, \rho, \alpha) = x_j^{r_j}(1 + D_j(x_j, \rho, \alpha)) - x_{j+1} \quad j = 1, \dots, k-1$$

avec $r_j = 1 + \mu_j$ et $D_j \in QR\mathcal{H}^{1+p,q)}$, $D_j(0, \rho, \alpha) \equiv 0$. Si $f \in QR\mathcal{H}^{k+p,q}$, on dit que le couple (χ, f) est un **couple d'Hilbert** de l'algbre $QR\mathcal{H}^{k+p,q}$. Ces **composantes** sont les germes $D_1, \dots, D_{k-1}$ et f. En cas d'ambiguit, les "puissances" r_j et la dimension de non trivialit $k-1$ seront prcises. Soit (χ, f) un couple d'Hilbert **convergent**: ie. ses composantes appartiennent à l'algèbre convergente $QR\mathcal{H}_{cvg}^{k+p,q}(x, \rho, \alpha)$. On suppose que la dimension de non-trivialit du couple (χ, f) est $k-1$, et que les coordonnes ρ sont des intgrales premires de χ. Dans ce cas, on peut prendre $p = 0$ pour simplifier, quitte remplacer l'algbre $QR\mathcal{H}_{cvg}^{k+p,q}(x, \rho, \alpha)$ par une autre algbre convergente $QR\mathcal{H}_{cvg}^{k,q'}(x, \alpha')$ (en utilisant les fonctions lmentaires dans les coordonnes ρ (cf. IA[Mo]). On suppose que ce couple est ralis sur un ouvert $U \in ((\mathbb{R}^{+*})^{k+p} \times \mathbb{R}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}, 0)$, continu sur $\overline{U}$.

Soit $(\pi, \mathcal{N})$ le premier éclatement de χ de diviseur exceptionnel $\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}(0)}$ (cf. IVA[Mo]), et soit $(\widetilde{\chi}, \widetilde{f})$ le relevé de (χ, f). Dans les coordonnées (ρ, α, u) au dessus de $\mathcal{D}$, le champ relevé s'écrit

$$\widetilde{\chi} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \sum_{j=1}^{k-1} s_j(\mu) u_j \frac{\partial}{\partial u_j}$$

avec $s_j(0) = 1$ et $\widetilde{f}_a \in QR\mathcal{H}_{cvg}^{1,\cdot}(\rho, .)$ pour tout $a \in \mathcal{D}$. On déduit facilement du lemme 2.1.1

Définition et Lemme 2.1.2. *La multiplicité algébrique du couple d'Hilbert (χ, f) en chaque point $m = (0, 0, \nu_m) \in B'_{k,0} = \{(x, \mu) = 0\} \cap \overline{U}$, est la multiplicité algébrique positive $ma^+(\widetilde{\chi}_{a_0}, \widetilde{f}_{a_0})_{a_m}$ au point $a_m = (0, 0, \nu_m, 0) \in \mathcal{D}$. On la note $ma(\chi, f)_m$. L'application $m \in B'_{k,0} \mapsto ma(\chi, f)_m$ est semi-continue supérieurement.* $\blacksquare$

Soient t un réel> 0 et ψ_μ une famille analytique de difféomorphismes de $(\mathbb{R}^{q_2}, 0)$. Une **transformation semi-diagonale de paramètres** (t, ψ) (et **de puissances** r_j et **de taille** k), est un morphisme $T_{t,\psi} : (x', \mu, \nu') \in ((\mathbb{R}^{+*})^k \times \mathbb{R}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}, 0) \mapsto (x, \mu, \nu) \in ((\mathbb{R}^{+*})^k \times \mathbb{R}^{q_1} \times \mathbb{R}^{q_2}, 0)$ avec

$$x_1 = t x'_1, \quad x_j = t^{r_1 \times \cdots \times r_{j-1}} x'_j \quad \text{pour} \quad j = 2, \dots, k \quad \text{et} \quad \nu = \psi_\mu(\nu')$$

Ces transformations forment un groupe pour la composition: $T_{t,\psi} \circ T_{t',\psi'} = T_{tt',\psi \circ \psi'}$. Ce groupe agit sur l'espace des couples d'Hilbert à composantes dans l'algèbre $QR\mathcal{H}_{cvg}^{k,q}$ (et mme dans l'algèbre $QR\mathcal{H}^{k,q}$), de puissances r_j et de dimension de non-trivialit $k-1$.

Lemme 2.1.3. *La multiplicité algébrique du couple (χ, f) sur $B'_{k,0}$ est invariante par le groupe des transformations semi-diagonales.*

Preuve. Appliquons le premier éclatement au couple (χ, f) et à son image (χ', f') par $T_{t,\psi}$: $t^s\chi' = (T_{t,\psi}^{-1})_*\chi$ pour une certaine puissance s, et $f' = T_{t,\psi}^*(f)$. Soit $\widetilde{T}_{t,\psi}$ le relevé de $T_{t,\psi}$ au dessus des singularités principales sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, et soient (ρ, μ, ν, u) et (ρ', μ, ν', u') les coordonnées au dessus de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. En utilisant les intgrales premires non triviales de χ et χ', dans ce premier clatement, on vrifie facilement que

$$\rho = t\rho' \quad \nu = \psi_\mu(\nu') \quad \text{et} \quad u = u'$$

Le morphisme $\widetilde{T}_{t,\psi}$ induit donc un isomorphisme $\widetilde{T}_{t,\psi}^*$ entre les anneaux $QR\mathcal{H}^{1,q}(\rho, \alpha, u)$ et $QR\mathcal{H}^{1,q}(\rho', \alpha', u')$ qui préserve les degrés des blocs $\cdot$-homogènes et donc la multiplicité algébrique. □

Remarque 2.1.1. Soit maintenant $B_{k,0} = \{\prod_{j=1}^k x_j = 0,\ \mu = 0\} \cap \overline{U}$. Soit $m \in B_{k,0} \setminus B'_{k,0}$, d'aprs le procd de dsingularisation de la drivation d'Hilbert (IVA[Mo]), le germe en m du couple (χ, f) est **analytiquement conjugué à un couple d'Hilbert** qu'on note (χ_m, f_m), et qui est à composantes dans une algèbre $QR\mathcal{H}_{cvg}^{k',q'}$ avec $k' < k$. On définit alors la multiplicité algébrique du couple (χ, f) en m par $ma(\chi, f)_m = ma(\chi_m, f_m)_m$. De plus, d'aprs ce mme procd, si $m \neq 0$ et $b = \pi^{-1}(m)$, alors les couples (χ_m, f_m) et $(\widetilde{\chi}_b, \widetilde{f}_b)$ sont conjuguées par une transformation semi-diagonale $T_{\rho',\psi}$. La généralisation du lemme 2.1.1 est

Lemme 2.1.4. *L'application $m \in B_{k,0} \mapsto ma(\chi, f)_m$ est localement majorée.*

Preuve. Par induction sur k. Le lemme 2.1.1 implique le cas $k = 1$. Soit $k > 1$, prouvons le lemme au point $m = 0$ par exemple. Soit $a \in \partial\mathcal{D}$, le couple relevé $(\widetilde{\chi}_a, \widetilde{f}_a)$ est un couple d'Hilbert, à composantes dans une algèbre $QR\mathcal{H}_{cvg}^{k'+1,q'}$ avec $1 \leq k' < k$ ($k' - 1$ tant sa dimension de non-trivialit). Soit $B_{k',0}(a) \subset \overline{\mathcal{N}}$ le germe en a de l'intersection du bord $\partial\mathcal{N}$ avec le sous-ensemble $\{\mu = 0\}$. Soit $b \in B_{k',0}(a) \setminus (\partial\mathcal{D}, a)$ et soit $m = \pi(b) \in B_{k,0} \setminus B'k, 0$. D'après la remarque 2.1.1, le germe en b du couple $(\widetilde{\chi}_a, \widetilde{f}_a)$ est analytiquement conjugu au couple d'Hilbert $(\widetilde{\chi}_b, \widetilde{f}_b)$. De plus, les couples (χ_m, f_m) et $(\widetilde{\chi}_b, \widetilde{f}_b)$ sont conjuguées par une transformation semi-diagonale $T_{\rho',\psi}$. Par le lemme 2.1.3, elles ont la même multiplicité algbrique en m et en b. Par l'hypothèse de récurrence, cette multiplicité algbrique est localement majorée en a, et par la compacité de $\partial\mathcal{D}$ et la surjectivit de π, elle est majorée sur un voisinage de 0 dans $B_{k,0} \setminus B'_{k,0}$. Le lemme 2.1.2 permet de finir la preuve. □

Je ne sais pas si cette application est semi-continue supérieurement. Pour cela, il faut savoir comparer la multiplicité algbrique principale $ma(\chi, f)_0$ et les multiplicités algbriques secondaires $ma(\widetilde{\chi}_a, \widetilde{f}_a)_a$ sur le bord $\partial\mathcal{D}$. Une gnralisation de la notion de multiplicit algbrique, qui convient notre contexte, est la suivante: soit $m \in B'_{k,0}$, on dfinit, par rcurrence sur k, la **multiplicit algbrique gnralise** du couple (χ, f) en m, qu'on note $mag(\chi, f)_m$: pour $k = 1$, on pose $mag(\chi, f)_m = ma(\chi, f)_m$, et pour $k > 1$, on pose

$$mag(\chi, f)_m = \max\{\sup\{mag(\widetilde{\chi}_a, \widetilde{f}_a)_a;\ a \in \partial\mathcal{D}(0, \nu_m)\},\ ma(\chi, f)_m\}$$

Pour $m \in B_{k,0} \setminus B'_{k,0}$, on pose $mag(\chi, f)_m = mag(\chi_m, f_m)_m$.

Lemme 2.1.5. *La multiplicit algbrique généralisée est finie et est invariante dans les transformations semi-diagonales. L'application* $m \in B_{k,0} \mapsto mag(\chi, f)_m$ *est semi-continue supérieurement.*

Preuve. Par une rcurrence sur k. Le cas $k = 1$ dcoule du lemme 2.1.1 (pour la semi-continuit suprieure et la finitude), et du lemme 2.1.3 (pour l'invariance par les transformations semi-diagonales) . Soit $k > 1$, faisons la preuve en $m = 0$ par exemple. Reprenons la transformation $T_{t,\psi}$ du lemme 2.1.3, en utilisant l'expression du morphisme π, on vérifie aisément que sur le bord de $\mathcal{D}$, cette transformation se relève en une transformation semi-diagonale T_{1,ψ_t} avec $\psi_{t,\mu'}(\nu', X(\rho_0', \mu')) = (\nu, X(\rho_0, \mu'))$, où $X(.)$ sont les fonctions élémentaires des algèbres locales $QR\mathcal{H}^{\cdot\cdot}$ correspondantes. Donc, par l'hypothse de rcurrence, la multiplicit algbrique gnralise est invariante par les transformations semi-diagonales.

Reprenons les notations de la preuve du lemme 2.1.4. Par l'hypothse de rcurrence, la multiplicit algbrique gnralise est finie sur $B_{k',0}(a)$, et y est semi-continue suprieurement. Par la compacit de $\partial\mathcal{D}(0)$, elle est finie et semi-continue suprieurement sur $\partial\mathcal{N} \cap \{\mu = 0\}$ (germifi le long de $\partial\mathcal{D}(0)$). Donc, par son invariance par les transformations semi-diagonales, elle est finie et semi-continue suprieurement en $m = 0$.
□

La généralisation de cette notion de multiplicité algbrique aux points m tels que $\mu_m \neq 0$ est d'intérêt théorique certain mais n'est d'aucune utilité dans notre contexte. En fait, cette multiplicité algbrique est liée aux blocs $\widetilde{\chi}_m$-homogènes de la série de $\widetilde{f}_m$, et ces blocs dépendent étroitement des valeurs μ_m par l'intermédiaire des valeurs propres des opérateurs d'Euler associés à la drivation $\widetilde{\chi}_m$.

(b) Couples d'Hilbert r-algébrisables et voisinages universels.

Soit (χ, f) un couple d'Hilbert à composantes $D_1, \dots, D_{k-1}, f$ dans l'algèbre $QR\mathcal{H}^{k+p,q}(x, \rho, \alpha)$. Soient $g_j = x_j^{r_j}(1 + D_j) - x_{j+1}$, $j = 1, \dots, k-1$, les intégrales premières non triviales de χ. On appelle **partie principale** de χ, qu'on note χ_{pr}, la dérivation d'Hilbert dont les intégrales premières non triviales sont $g_{j,pr} = x_j^{r_j} - x_{j+1}$, $j = 1, \dots, k-1$.

Soient $X_j(x_j, \mu) = (x_j, z(x_j, \mu))$ et $X(x, \mu) = (X_j(x_j, \mu))_{j=1,\dots,k}$ les fonctions élémentaires de l'algèbre $QR\mathcal{H}^{k+p,q}$ dans les coordonnées x. Le couple (χ, f) est dit 0-**algébrisable de degré** $m_0 \in \mathbb{N}$ si les fonctions D_j (resp. f) sont algébriques en X_j (resp. X), de degré m_0.

Soit $(\pi, \mathcal{N})$ le premier éclatement de χ en 0 de diviseur exceptionnel $\overline{\mathcal{D}}$. Soit $a \in \partial\mathcal{D}$ de codimension $k' < k$ dans $\overline{\mathcal{D}}$, et soient $D_1', \dots, D_{k'-1}', f'$ les composantes du couple d'Hilbert relevé $(\widetilde{\chi}_a, \widetilde{f}_a)$. Soient $(x' = (x_1', \dots, x_{k'}'), \rho', \alpha')$ les coordonnées locales sur le germe $(\mathcal{N}, a)$ et soient $X_j'(x_j', \mu')$ et $X'(x', \mu')$ les fonctions élémentaires, dans les coordonnées x', de l'algèbre locale en a $QR\mathcal{H}^{k'+p+1,q'}$. Soit $m \in \mathbb{N}$, on définit une application $EP_{0,a,m}$ (**E**clatement puis **P**erturbation) de l'ensemble des couples d'Hilbert de l'algèbre $QR\mathcal{H}^{k+p,q}$ dans l'ensemble des couples d'Hilbert de l'algèbre $QR\mathcal{H}^{k'+p+1,q_m'}$, de la façon suivante: soient $D"_1, \dots, D"_{k'-1}$

(resp. f") des polynômes en X'_j (resp. X'), de degré m, et à **coefficients universels dans un voisinage de 0**. On note

$$EP_{0,a,m}(\chi, f)_0 = (\mathcal{X}, F)_a$$

le couple d'Hilbert de composantes $D'_1 + D"_1, \ldots, D'_{k'-1} + D"_{k'-1}$ et $f' + f"$; les dérivations $\widetilde{\chi}_a$ et $\mathcal{X}$ ayant les mêmes parties principales, et $q'_m = q' + (0, q'_{2,m})$, o $q'_{2,m}$ est le nombre des coefficients universels dans les polynmes $D"_j$ et $f"$. Si $k' = 1$, les fonctions D'_j et $D"_j$ sont nulles. Ces applications envoient bien sûr une algèbre convergente sur une algèbre convergente.

Soient $r, m_0, \ldots, m_r, m_{r+1} \in \mathbb{N}$. Supposons définis les couples d'Hilbert r-**algébrisables de degré** $(m_0, \ldots, m_r)$. Un couple d'Hilbert $(\chi, f)_a$ est dit $(r+1)$**-algébrisable de degré** $(m_0, \ldots, m_r, m_{r+1})$ s'il existe un couple $(\chi', f')_{a'}$ r-algébrisable de degré $(m_0, \ldots, m_r)$ telle que

$$(\chi, f)_a = EP_{a',a,m_{r+1}}(\chi', f')_{a'}$$

Autrement dit, on obtient le couple $(\chi, f)_a$ en clatant le couple (χ', f') en a', puis en perturbant le germe en a de son clat, par des fonctions "algbriques" de degr m_{r+1}.

(b1) Construction de la collection universelle de couples r-algébrisables.

Soit (χ_0, f_0) un couple d'Hilbert dont les composantes $D_1, \ldots, D_{k-1}, f_0$ sont des éléments de $QR\mathcal{H}^{k,q=(q_1,q_2)}$. D'après la désingularisation de la dérivation d'Hilbert (cf. IVA, [Mo]), le diviseur exceptionnel de la désingularisation complète de χ_0 ($k-1$ éclatements) est identique à celui de la désingularisation complète de la dérivation principale associée. Les strates de ce diviseur total (qui est compact et qu'on notera $\mathcal{D}$ dans la suite), sont des **semi-algébriques** dont le nombre et la complexité ne dépendent que de l'entier k. Par exemple, la premire de ces strates $\mathcal{D}_{1,k}(0)$ (celle de plus grande dimension qui est $k-1$), est l'image de la semi-sphre

$$S_k^{+*}(0,1) = \{y \in (\mathbb{R}^{+*})^k;\ y_1 + \cdots y_k = 1\} \tag{9}$$

par le morphisme $\mathcal{L}_{k,0} : y \in S_k^{+*}(0,1) \mapsto u \in \mathbb{R}^{k-1}$, avec $u_j = y_j - y_{j+1}$. Les autres strates $\mathcal{D}_{i,k}(0)$ (pour $i > 1$), sont chacune identique une strate $\mathcal{D}_{1,k'}(0)$ ($k' < k$), ou un produit de tels strates. Pour simplifier la prsentation dans la suite, on omettra les indices k et (0), sauf en cas d'ambiguit.

On suppose que le couple (χ_0, f_0) est 0-algébrisable de degré m_0, à **coefficients universels dans un voisinage de 0**. Les **propriétés de finitude** de ce couple (χ_0-régularité et χ_0-finitude de f_0 (cf. IB, [Mo])), ne dépendent que des entiers k (nombre de variables x), q_1 (nombre de fonctions lmentaires dans les variables x) et m_0 (degr dans ces variables et dans ces fonctions): la rfrence la plus gnrale sur ce sujet (et sur ce qui va suivre), est le travail de Khovanski [K], notament sur les fonctions pfaffiennens dfinies sur des varits semi-pfaffiennes. Cependant, certains travaux rcents d'Il'yashenko, Novikov et Yakovenko ([IY], [NY]), consacrs l'tude de l'intgrale Ablienne, pourraient aider donner des estimations explicites des degrs de rgularit et des indices de noethrianit.

A partir de ce couple, nous allons construire sur $\mathcal{D}$ une **collection universelle de couples r-algébrisables** et une **collection associée de voisinages universels** (en ce sens qu'ils ne dépendent que des entiers m_0, k et q_1), et au dessus de laquelle on a des **propriétés de finitudes universelles** pour les couples d'Hilbert (χ, f) "voisins" de (χ_0, f_0) (dans un sens qu'on précisera).

Soit m_1 un majorant de la multiplicité algébrique généralisée $mag(\chi_0, f_0)_0$. Soit $(\pi_1, \mathcal{N}_1)$ le premier éclatement de χ_0 en 0, de diviseur exceptionnel $\overline{\mathcal{D}}_1$. Soit (χ_1, f_1) la collection de couples d'Hilbert au dessus de $\partial\mathcal{D}_1$, qui sont 1-algébrisables de degré (m_0, m_1), et qui sont construits comme suit: en tout point $a \in \partial\mathcal{D}_1$, on pose

$$(\chi_1, f_1)_a = EP_{0,a,m_1}(\chi_0, f_0)_0$$

Notons $(\widetilde{\chi}_0, \widetilde{f}_0)$ le relevé du couple (χ_0, f_0) et $(\widetilde{\chi}_0, \widetilde{f}_0)_a$ son germe en $a \in \overline{\mathcal{D}}_1$. Soit $\mathcal{C}_{1,\ell,i}$ une strate de $\partial\mathcal{D}_1$ de codimension $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$ dans $\overline{\mathcal{D}}_1$ (l'indice i est énumératif, et il est major par une fonction de k)). C'est un semi-algbrique de type (9) (en remplaons k par $k-\ell$). Le long de cette strate, la dimension de non trivialité de la dérivation $\widetilde{\chi}_0$ est $\ell - 1$. Pour pouvoir construire des couples 2-algébrisables **universels**, on doit montrer que la multiplicité algébrique généralisée des couples 1-algébrisables construits, est majorée sur $\partial\mathcal{D}_1$. Ceci est **hautement non trivial**, car ces couples ne se recollent pas forcément d'une strate à l'autre, et les seules strates fermes sont les strates rduites un point.

Soit $a \in \partial\mathcal{C}_{1,\ell,i} \cap \mathcal{C}_{1,\ell_1,i_1}$ (avec forcment $\ell_1 > \ell$). Notons simplement $\mathcal{C}_a$ le germe de $\mathcal{C}_{1,\ell,i}$ en a. Si $b \in \mathcal{C}_a$, on sait que (cf. remarque 2.1.1), le germe en b du couple d'Hilbert $(\widetilde{\chi}_0, \widetilde{f}_0)_a$ est analytiquement conjugué au couple d'Hilbert $(\widetilde{\chi}_0, \widetilde{f}_0)_b$. Dans la suite, on parlera indifféremment de l'un ou de l'autre dans les situations similaires. Appliquons un premier éclatement $(\pi_{1,a}, \mathcal{N}_{1,a})$ au couple $(\widetilde{\chi}_0, \widetilde{f}_0)_a$, au point a, et notons $(\widetilde{\chi}_{0,1}, \widetilde{f}_{0,1})$ son relevé. Soit $a_1 \in \pi_{1,a}^{-1}(a) \cap \overline{\pi_{1,a}^{-1}(\mathcal{C}_a)}$, et soit $\mathcal{C}_{a_1,a}$ le germe en a_1 de $\pi_{1,a}^{-1}(\mathcal{C}_a)$. Par la remarque 2.1.1, en tout point $b_1 \in \mathcal{C}_{a_1,a}$, le couple $(\widetilde{\chi}_0, \widetilde{f}_0)_{\pi_{1,a}(b_1)}$ est équivalent au germe en b_1 du couple $(\widetilde{\chi}_{0,1}, \widetilde{f}_{0,1})_{a_1}$ par une transformation semi-diagonale T_{t_1,ψ_1}.

On répète ce procédé en $a_0 = a$ au plus $p = \ell_1 - \ell$ fois, appliqué aux singularités a_j de dimension de non trivialité$> \ell$. On construit ainsi un morphisme $(\pi_{p,a}, \mathcal{N}_{p,a})$ et un relevé $(\widetilde{\chi}_{0,p}, \widetilde{f}_{0,p})$ du couple $(\widetilde{\chi}_0, \widetilde{f}_0)_a$. Soit $a_p \in \pi_{p,a}^{-1}(a) \cap \overline{\pi_{p,a}^{-1}(\mathcal{C}_a)}$ et soit $\mathcal{C}_{a_p,a}$ le germe en a_p de $\pi_{p,a}^{-1}(\mathcal{C}_a)$. Soit $b_p \in \mathcal{C}_{a_p,a}$ et $b = \pi_{p,a}(b_p)$. Le couple $(\widetilde{\chi}_0, \widetilde{f}_0)_b$ est équivalent au germe en b_p du couple $(\widetilde{\chi}_{0,p}, \widetilde{f}_{0,p})_{a_p}$ par une transformation semi-diagonale T_{t_p,ψ_p}. De plus, le germe en tout point du couple $(\widetilde{\chi}_{0,p}, \widetilde{f}_{0,p})$ est de dimension de non trivialité $\ell - 1$. Construisons alors en a_p un couple $(\chi_{1,\ell,i}, f_{1,\ell,i})_{a_p}$ au plus $(p+1)$-algébrisable de degré $(m_0, 0, \dots, 0, m_1)$, à partir du couple (χ_0, f_0) et de polynômes universels perturbateurs $D_{j,\ell,i}$ et $F_{\ell,i}$, écrits dans les coordonnées locales en a_p. **Le point clé** est que le couple $(\chi_1, f_1)_b$ est équivalent au germe en b_p du couple $(\chi_{1,\ell,i}, f_{1,\ell,i})_{a_p}$ par une transformation semi-diagonale T_{t_p,ψ'_p} où ψ'_p est le compos de ψ_p et d'un automorphisme de l'espace des coefficients universels des polynômes $D_{j,\ell,i}$ et $F_{\ell,i}$.

En appliquant cette désingularisation en tout point a du bord de la strate $\mathcal{C}_{1,\ell,i}$,

on construit une variété compact, connexe à bord $\overline{\mathcal{D}}_{1,\ell,i}$ (qui est une union de strates de type (9), dont la complexit est majore par l'entier k, et dont la strate principale $\mathcal{D}_{1,\ell,i}$ est isomorphe à $\mathcal{C}_{1,\ell,i}$), sur laquelle est défini un couple local $(\chi_{1,\ell,i}, f_{1,\ell,i})$, dont la classe d'équivalence (ou classe de recollement) est le groupe des transformations semi-diagonales. Par le lemme 2.1.5, la multiplicité algébrique généralisée des couples (χ_1, f_1), est donc majorée sur la strate $\mathcal{C}_{1,\ell,i}$, et par consquent, elle est majore sur $\partial\mathcal{D}_1$, par une fonction universelle dans les entiers m_0, m_1, k et q_1.

Soit m_2 un majorant de cette multiplicité algbrique gnralise sur $\partial\mathcal{D}_1$. Appliquons un premier éclatement (dont le germe en a est) $(\pi_2, \mathcal{N}_2)_a$ aux couples $(\chi_1, f_1)_a$ en tout point $a \in \partial\mathcal{D}_1 \setminus \cup\mathcal{C}_{1,1,i}$. Soit $\overline{\mathcal{D}}_2$ son diviseur exceptionnel (il n'est pas forcment connexe). On construit alors une collection de couples d'Hilbert (χ_2, f_2) au dessus de $\partial\mathcal{D}_2$, qui sont 2-algébrisables de degré (m_0, m_1, m_2): en tout point $a_1 \in \partial\mathcal{D}_2 \cap \pi_2^{-1}(a)$, on pose

$$(\chi_2, f_2)_{a_1} = EP_{a,a_1,m_2}(\chi_1, f_1)_a$$

On répète ce procédé au plus $(k-1)$-fois appliqué aux singularités de dimension de non trivialité> 0. Pour majorer la multiplicité algébrique généralisée à une étape d'ordre r, on plonge chaque strate $\mathcal{C}_{r,\ell,i}$ dans la variété compacte correspondante $\overline{\mathcal{D}}_{r,\ell,i}$ sur laquelle on construit un couple local $(\chi_{r,\ell,i}, f_{r,\ell,i})$ à partir des couples locaux $(\chi_{r',\ell',i'}, f_{r',\ell',i'})$ sur les variétés compactes antérieures $\overline{\mathcal{D}}_{r',\ell',i'}$.

(b2) Construction de la collection des voisinages universels.

Soit (χ_0, f_0) comme ci-dessus et $m_1, \ldots, m_{k-1}$ des majorants des multiplicités algébriques généralisées successives. Soit $((\chi_r, f_r))_{r=1,\ldots,k-1}$ la collection des couples r-algébrisables associée. Les différentes variétés $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_r$ et $\mathcal{D}_{r,\ell,i}$ sont des ensembles semi-algébriques dont la complexité ne dépend que de l'entier k. En vue d'obtenir des proprits de finitude universelles pour la collection $((\chi_r, f_r))_{r=0,\ldots,k-1}$, on construira, dans la suite, des voisinages **au-dessus** de ces variétés, en considérant le paramètre ν dans un voisinage de 0 dans l'espace de la collection des coefficients universels des couples $((\chi_r, f_r))_{r=0,\ldots,k-1}$. La dimension de cet espace est **universelle** dans les entiers $(m_j), k$ et q_1.

Plaçons-nous au dessus d'une variété $\overline{\mathcal{D}}_{r,\ell,i}$. Soit $V_{r,\ell,i}(a) \subset \overline{\mathcal{D}}_{r,\ell,i}$ un voisinage **choisi** pour la multiplicité algébrique généralisée du couple $(\chi_{r,\ell,i}, f_{r,\ell,i})_a$: autrement dit, cette multiplicité en tout point de $V_{r,\ell,i}(a)$ est majorée par la multiplicit en a (cf. lemme 2.1.5). Les anneaux $QR\mathcal{H}_{cvg}$ sont noethériens. D'après le lemme de cohérence IB3[Mo], l'indice de noethérianité des idéaux de faisceaux différentiels d'un anneau noethérien, est une fonction semi-continue supérieurement. **Choisissons** un voisinage $W_{r,\ell,i}(a)$ **au dessus** de $V_{r,\ell,i}(a)$, dans lequel cet indice est majoré par celui de la fibre en a, et qu'on note $L_{r,\ell,i}(a)$. Soit $L_{r,\ell,i}((m_j), k, q_1)$ son maximum sur $\overline{\mathcal{D}}_{r,\ell,i}$ (il est invariant par les transformations semi-diagonales!). Et soit $L((m_j), k, q_1)$ son maximum sur la collection des couples *cdot*-algébrisables.

Appliquons un premier éclatement $(\pi_a, \mathcal{N}_a)$ en a de diviseur exceptionnel $\overline{\mathcal{D}}_{r+1,a}$; sa strate principale $\mathcal{D}_{r+1,a}$ est incluse dans une composante connexe de $\mathcal{D}_{r+1}$, et elle ne dépend pas du point a (en tant que fibre d'une fbration triviale). Notons

simplement $(\widetilde{\chi}, \widetilde{f})$ le relevé du couple $(\chi_{r,\ell,i}, f_{r,\ell,i})_a$ au dessus de $\overline{\mathcal{D}}_{r+1,a}$. Soient $j_1, j_2 \in \{0, \ldots, L_{r,\ell,i}(a)\}$ et soient

$$f^{\pm}_{j_1,j_2} = (\widetilde{\chi}^{j_1} \pm \widetilde{\chi}^{j_2})\widetilde{f} \tag{10}$$

Ce sont les fonctions (ou leurs germes) qui apparaissent dans la preuve du lemme de finitude IB1[Mo]. Et il s'agit donc de montrer que le degré de la projection intgrale $\pi_{\widetilde{\chi}}$ restreinte à la fibre nulle de $f^{\pm}_{j_1,j_2}$, est majoré au dessus de $\mathcal{D}_{r+1,a}$. D'après le lemme d'extension IB2[Mo], l'algèbre $QR\mathcal{H}^{1,\cdot}_{cvg}$ est $\widetilde{\chi}$-finie. Ce degré est donc majoré au dessus de tout compact de $\mathcal{D}_{r+1,a}$.

Malheureusement, ces fonctions $f^{\pm}_{j_1,j_2}$ ne se prolongent pas forcément au bord de $\mathcal{D}_{r+1,a}$. Pour remédier à cela, il vaut mieux remplacer la dérivation $\widetilde{\chi}$ par la dérivation $\chi_{r,\ell,i}$ (ce qui est très convenant pour les estimations explicites), ou simplement par la dérivation $\mathcal{Y}$ donnée par la proposition IVA1[Mo]

$$(\mathcal{L}_\ell)_*\mathcal{Y} = F_\ell\widetilde{\chi}$$

le morphisme $\mathcal{L}_\ell$ et la fonction F_ℓ ne dépendent que de la dérivation $\chi_{r,\ell,i}$. De plus, la dérivation $\mathcal{Y}$ et la fonction F_ℓ admettent un prolongement au bord de la semi-sphère $S^{+*}_\ell(0,1) = (\mathcal{L}_{\ell,0})^{-1}(\mathcal{D}_{r+1,a})$ (qui est du type (9)). Maintenant, les fonctions

$$F^{\pm}_{j_1,j_2} = F_\ell^{2L_{r,\ell,i}(a)}(f^{\pm}_{j_1,j_2} \circ \mathcal{L}_\ell)$$

admettent aussi un prolongement au bord de $S^{+*}_\ell(0,1)$, et leur degré dans la projection $\pi_{\mathcal{Y}}$ majore le degré recherché. Toujours d'après le lemme d'extension IB2[Mo], les algèbres $QR\mathcal{H}_{cvg}$ sont $\mathcal{Y}_A$-finie pour tout $A \in \overline{S^{+*}_\ell(0,1)}$. Notons $d_{r,\ell,i}(a)$ la somme de ces degrés pour les fonctions $f^{\pm}_{j_1,j_2}$, au dessus de $\mathcal{D}_{r+1,a}$. C'est une fonction semi-continue supérieurement sur $\overline{\mathcal{D}}_{r,\ell,i}$. **Choisissons** un voisinage $U_{r,\ell,i}(a) \subset W_{r,\ell,i}(a)$ tel que ce nombre soit réalisé sur $\pi_a^{-1}(U_{r,\ell,i}(a))$. Notons $d_{r,\ell,i}((m_j), k, q_1)$ le maximum de $d_{r,\ell,i}(a)$ sur $\overline{\mathcal{D}}_{r,\ell,i}$. Ainsi, la collection des voisinages $U_{r,\ell,i}(a)$ est **universelle** dans les entiers $(m_j), k$ et q_1.

(c) Preuve du thorme 2.1.

Pour viter un conflit de notations dans la suite, on notera $(\mathcal{X}, F)$ au lieu du couple d'Hilbert (χ, f) du thorme 2.1. Pour allger le texte dans la suite, on entendra par **restriction appropriée**, toute restriction à un sous-ensemble de W_0 ou U_0 ou à leurs relevés dans la désingularisation de $\mathcal{X}$. La preuve qui suit est basée sur les résultats de la partie IVB de [Mo]. Le couple $(\mathcal{X}, F)$ satisfait l'hypothse $(H\lambda)$. Par le thorme IVB1[Mo], il possde une multiplicit algbrique $ma = ma(\mathcal{X}, F)_0$. Prenons $m_0 = ma + N_0 + 2$. Soit (χ_0, f_0) le couple 0-algébrisable de degré m_0, à composantes dans $QR\mathcal{H}^{k,(q_1,.)}(x, \alpha')$ $(\alpha' = (\mu, \nu')$, cf. ci-desous pour les variables ν'). Construisons une collection universelle $((\chi_r, f_r))_{r=1,\ldots,k-1}$ de couples r-algébrisables de degré $(m_0, \ldots, m_r)$ avec

$$m_r = \sup_{a \in \partial\mathcal{D}_{r-1}} \{mag(\chi_{r-1}, f_{r-1})_a\} + 2$$

Ainsi, les degrés m_r ne dépendent que des entiers m_0, k et q_1. Les variables ν' tant donc dans l'espace de la collection des coefficients universels de ces couples r-algbrisables. Notons

$$L'_{r,\ell,i}(m_0,k,q_1) = L_{r,\ell,i}((m_j),k,q_1), \quad L'(m_0,k,q_1) = L((m_j),k,q_1)$$

$$d'_{r,\ell,i}(m_0,k,q_1) = d_{r,\ell,i}((m_j),k,q_1)$$

et notons toujours $U_{r,\ell,i}(a)$ les voisinages universels associs ces degrs. Montrons que les propriétés de finitude du couple $(\mathcal{X}, F)$ ne dépendent que de celles de cette collection. Appliquons une transformation semi-diagonale $T_{t,id}$ au couple $(\mathcal{X}, F)$ et notons $(\mathcal{X}_t, F_t)$ son image. Soient $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{k-1})$ les valeurs (coordonnes) des intgrales premires non triviales de $\mathcal{X}_t$. Soit γ l'orbite principale de $\mathcal{X}$ en 0, son image $\gamma' = T^{-1}_{t,id}(\gamma)$ est l'orbite principale de $\mathcal{X}_t$ en 0. Soit σ (resp. $\sigma' = T^{-1}_{t,id}(\sigma)$) une transversale analytique γ (resp. γ'), de coordonnes (α, λ) (resp. (α, λ')). La restriction de $T_{t,id}$ σ' s'crit

$$(\alpha, \lambda) = T_{t,id|\sigma'}(\alpha, \lambda') = (\alpha, (t^{r_1 \times \cdots \times r_j} \lambda'_j))$$

Donc, le morphisme $T^*_{t,id|\sigma'}$ envoie l'idal $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathbb{R}\{\alpha, \lambda\}$ sur l'idal $\mathcal{M}_{\lambda'} \subset \mathbb{R}\{\alpha, \lambda'\}$. Par le lemme de transfert IB6[Mo], le couple $(\mathcal{X}_t, F_t)$ satisfait l'hypothse $(H\lambda)$, l'entier N_0 tant prserv. Toujours par ce mme lemme, les indices de neothrianit de ces couples, sont prservs. Et par le lemme 2.1.3, les couples $(\mathcal{X}, F)$ et $(\mathcal{X}_t, F_t)$ ont la même multiplicit algbrique en 0. Ils ont donc les mêmes propriétés de finitude. Et pour t suffisament petit, les coefficients des jets d'ordre m_0 en $X(x, \mu)$ des composantes de $(\mathcal{X}_t, F_t)$ sont réalisés sur le projet correspondant du voisinage universel $U_{0,k,1}(0)$ (aprs bien sr identification des coordonnes x et x').

Ce qui suit utilise abondamment les arguments de la preuve du thorme IVB1 de [Mo]. Omettons provisoirement l'indice t. Soit $(\pi, \mathcal{N})$ le premier éclatement du couple $(\mathcal{X}, F)$ de diviseur exceptionnel $\overline{\mathcal{D}}_1$ et soit $(\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{F})$ son relevé. Soient (ρ, α, u) les coordonnées sur $\mathcal{N}$ au dessus de $\mathcal{D}_1$ et soit a_0 la singularité principale sur $\mathcal{D}_1$. Notons $G_1 = \mathbf{j}^{N_0}_u(\widetilde{F}_{a_0})$ et $G_2 = \sum_{n \leq ma} g_n(G_1)$ où $g_n(G_1)$ est le bloc $\widetilde{\mathcal{X}}_{a_0}$-homogène de degré n. Le germe $\widetilde{F}_{a_0}$ est $\widetilde{\mathcal{X}}_{a_0}$-équivalent au germe

$$G((\mathcal{X}, F)(t)) = G_2 + \mathbf{j}^{ma+N_0+1}_{X(\rho,\mu)}(\widetilde{F}_{a_0} - G_1)$$

qui est algébrique en X de degré$\leq m_0$. Soient (ρ', α', u') les coordonnées de l'éclaté de (χ_0, f_0) et soit a'_0 sa singularité principale. Soit $G(\chi_0, f_0)$ le germe construit de la même façon que $G(\mathcal{X}, F)(t))$, à partir du couple (χ_0, f_0). Ces deux fonctions coincident par une identification des coordonnées (ρ, u) et (ρ', u'), sur une restriction appropriée. Quitte à réduire le voisinage $U_{0,k,1}(0)$, on peut supposer que les invariants universels de $G(\chi_0, f_0)$ sont réalisés sur le relevé en a'_0 de $U_{0,k,1}(0)$. Soit $L_0(N_0, ma, k, q_1)$ l'indice de noethérianité de l'idéal différentiel $I_{\widetilde{\chi}_{0,a'_0}, G(\chi_0, f_0)}$ et soit

$$d_0(N_0, ma, k, q_1) = \sum_{j_1, j_2 \leq L_0} d\pi_{\widetilde{\chi}_{0,a'_0} | Z((\widetilde{\chi}^{j_1}_{0,a'_0} \pm \widetilde{\chi}^{j_2}_{0,a'_0}) G(\chi_0, f_0))}$$

Ainsi, sur une restriction appropriée

$$ind(I_{\widetilde{\mathcal{X}}_{a_0},\widetilde{F}_{a_0}}) \le L_0 \quad \text{et} \quad d\pi_{\widetilde{\mathcal{X}}_{a_0}|Z(\widetilde{F}_{a_0})} \le L_0 d_0$$

Soit g_0 la fonction obtenue à partir de $\widetilde{f}_0$ par identification des coordonnées (ρ, u) et (ρ', u'). Au dessus d'une restriction appropriée sur $\mathcal{D}_1 \setminus \{a_0\}$, la fonction $\widetilde{F}$ est $\widetilde{\mathcal{X}}$-équivalente à g_0. Ainsi, sur cette restriction

$$ind(\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{F}}) \le L'(m_0, k, q_1) \quad \text{et} \quad d\pi_{\widetilde{\mathcal{X}}|Z(\widetilde{F})} \le L' d'_{0,k,1}(m_0, k, q_1)$$

Sur le bord de $\mathcal{D}_1$, on utilise l'argument de récurrence suivant: notons $(\mathcal{X}_r, F_r)$ le désingularisé de $(\mathcal{X}, F)(t)$ sur $\partial\mathcal{D}_r$ à une étape d'ordre r. Soit a un point d'une restriction appropriée sur $\partial\mathcal{D}_r$, de coordonnées (x, ρ, α), et soit a' le point correspondant dans l'éclatement du couple universel (χ_{r-1}, f_{r-1}), de coordonnées (x', ρ', α'). Quitte à réduire (t, ρ), on peut supposer que la restriction appropriée en a est réalisée sur le voisinage universel $U_{r,\ell,i}(a')$. Soit $(\mathcal{X}_r, F_r)_a$ le relevé de $(\mathcal{X}, F)$ et soit $\gamma_r \subset \mathcal{D}_r$ l'orbite principale en a. Supposons que, après identification des coordonnées (x, ρ) et (x', ρ') (et sur une restriction appropriée), on ait

- (i_r) il existe $N_{0,r} = (n_{0,r,j})$ tel que pour tout $m \in \gamma_r$, $\mathcal{I}_{(\mathcal{X}_r,F_r)_a}(m) \supset (\rho^{N_{0,r}})$.
- (ii_r) il existe $N_{1,r} = (n_{1,r,j})$ avec $n_{1,r,j} > n_{0,r,j}$ tel que le couple $(\mathcal{X}_r, F_r)_a$ soit équivalent au couple $(\widetilde{\chi}_{r-1}, \widetilde{f}_{r-1})_{a'}$ dans le quotient $SB/(\rho^{N_{1,r}})$ (autrement dit, les composantes de ces deux couples d'Hilbert, sont quivalentes dans ce quotient).

Montrons qu'il en est de même à l'étape d'ordre $r+1$. D'après l'hypothèse (ii_r) et la construction des couples r-algébrisables, les couples $(\mathcal{X}_r, F_r)_a$ et $(\chi_r, f_r)_{a'}$ sont équivalents dans le quotient $SB/(\rho^{N_{1,r}})\mathcal{M}_x^{m_r}$ sur une restriction appropriée. Appliquons un premier éclatement aux couples $(\mathcal{X}_r, F_r)_a$ et $(\chi_r, f_r)_{a'}$ de diviseurs exceptionnels $\overline{\mathcal{D}}_{r+1}(a)$ et $\overline{\mathcal{D}}_{r+1}(a')$. Soient $(\rho_0, \rho, \alpha, u)$ et $(\rho'_0, \rho', \alpha', u')$ les coordonnées des éclatés. Soit g_r la fonction obtenue à partir de $\widetilde{f}_r$ par identification des coordonnées (ρ_0, ρ, u) et (ρ'_0, ρ', u'). Au dessus d'une restriction appropriée sur $\mathcal{D}_{r+1}(a)$, la fonction $\widetilde{F}_r$ est $\widetilde{\mathcal{X}}_r$-équivalente à g_r. Ainsi, sur cette restriction

$$ind(\mathcal{I}_{\widetilde{\mathcal{X}}_r,\widetilde{F}_r}) \le L' \quad \text{et} \quad d\pi_{\widetilde{\mathcal{X}}_r|Z(\widetilde{F}_r)} \le L' d'_{r,\ell,i}(m_0, k, q_1)$$

Et d'après le théorème IVB1[Mo], et la construction des couples $(r+1)$-algébrisables, on a les hypothèses (i_{r+1}) et (ii_{r+1}) avec

$$N_{0,r+1} = (m_r - 1, N_{0,r}),\ N_{1,r+1} = (m_r, N_{1,r}),\ N_{0,1} = m_0 - 1 \text{ et } N_{1,1} = m_0$$

Soit $(\pi, \mathcal{N})$ la désingularisation complète de $(\mathcal{X}_t, F_t)$, de diviseur exceptionnel $\mathcal{D}$ et soit $\Delta = \overline{\pi^{-1}(U_0)} \cap \mathcal{D}$. Pour finir la preuve du lemme, on choisit une valeur de $t > 0$ sur un recouvrement fini au dessus de Δ, qui soit réalisé dans les voisinages universels $U_{r,\ell,i}$. On obtient alors

$$ind(I_{\mathcal{X},F}) \le \max\{L_0, L'\} \quad \text{et} \quad d\pi_{\mathcal{X}|Z(F)} \le L_0 d_0 + L' \sum_{r=0,\dots,k-1} \max_{\ell,i}\{d'_{r,\ell,i}\}$$

□

2.2. Preuve du Lemme 2.

Soit (χ, f) le couple d'Hilbert associé au déploiement ω_ν au voisinage du cycle singulier Γ_k. On a $k = q_1$ qui est aussi le nombre de singularités sur Γ_k; par le théorème de Bezout, il est majoré par une fonction du degré d. La restriction W_0 est un graphe analytique, donn par

$$W_0 = \{(\mu(\nu), \nu, \lambda(\nu);\ \nu \in (\mathbb{R}^{(d+1)(d+2)}, 0)\}$$

Or, l'idéal χ-transverse de f le long de γ, et l'hypothse $(H\lambda)$ sont invariants dans les changements de coordonnées analytiques sur les transversales à Γ_k (lemme de transfert IB6[Mo]). Choisissons donc $x_j = t$ pour $\epsilon = 0$. Toujours d'aprs ce lemme de transfert, l'idal retriction $J_{\chi,f,\gamma|W_0} \subset \mathbb{R}\{\nu\}$ coincide avec l'idal $\partial/\partial x_1$-transverse de $p_{1,.} - id$ (cf. (7)), le long de l'orbite $\{\nu = 0\}$. En conjuguant (7) (8) par le diffomorphisme $x_1 = t + O(\epsilon)$ on obtient que cet idal coincide avec l'idal $\partial/\partial t$-transverse de $p_{2,.} - id$ le long de $\{\nu = 0\}$. D'aprs l'hypothse $(**)$ et le lemme de division II1[Mo], on a donc $J_{\chi,f,\gamma|W_0} = (\epsilon)$. Or $\lambda_{|\epsilon=0} \equiv 0$, par conséquent $N_0 = 1$.

Appliquons un premier éclatement $(\pi, \mathcal{N})$ au couple (χ, f). Soit a_0 la singularité principale de $\widetilde{\chi} = \rho\partial/\partial\rho - \sum s_j u_j \partial/\partial u_j$. Comme $r_{j|\epsilon=0} \equiv 1$, on a $\rho = kt$ pour $\epsilon = 0$. Par conséquent, en comparant les sries asymptotiques de $\widetilde{f}_{a_0}$ et de $p_{2,.} - id$, on obtient que les multiplicités algbriques $ma(\chi, f)_0$ et $ma(I(t), 0)$, coincident. $\square$

Paralllement l'opration $EP_{0,a,m}$, dfinissons l'opration $PE_{0,a,m} : (\chi, f)_0 \mapsto (\chi', f')_a$, qui consiste en une perturbation de degr m des composantes du couple (χ, f), suivie d'un clatement. Notons $\mathcal{C}_0$ la classe des couples 0-algbrisables, composantes dans les algbres $QR\mathcal{H}^{k,(q_1,.)}(x, \mu, .)$, de dimension de non trivialit $k-1$, et de puissances r_j fixes. Si le couple $(\chi, f)_0 \in \mathcal{C}_0$ est de degr m_0, on dit que le couple image $(\chi', f')_a = PE_{0,a,m}(\chi, f)_0$ est 1'-algbrisable de degr (m_0, m). Notons $\mathcal{C}_0(q_2)$ la sous-classe des couples 0-algbrisables **induits**: leurs composantes appartiennent l'algbre $QR\mathcal{H}^{k,(q_1,q_2)}(x, \mu, \nu)$. Soit $\mathcal{C}_1(m) = EP_{0,a,m}(\mathcal{C}_0(q_2))$ (resp. $\mathcal{C}'_1(m') = PE_{0,a,m'}(\mathcal{C}_0(q_2)))$ la sous-classe des couples 1-algbrisables (resp. 1'-algbrisables) **induits**: leurs composantes appartiennent une algbre $QR\mathcal{H}^{k',(q'_1,q_{2,m})}(y, \mu', \nu')$ (resp. $QR\mathcal{H}^{k',q'_1,q_{2,m'})}(y, \mu', \nu")$). En vue de faciliter la recherche d'une estimation explicite dans le thorme 2.1, il est utile de s'intresser la question suivante: existe-il un entier $m' = m'(k, q_1, q_2, m)$, et un morphisme analytique (induction) $\psi(y, \mu', \nu') = (y, \mu', \nu"(\nu'))$, tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_0(q_2) & \xrightarrow{id} & \mathcal{C}_0(q_2) \\ {\scriptstyle PE_{0,a,m'}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle EP_{0,a,m}} \\ \mathcal{C}'_1(m') & \xrightarrow{\psi^*} & \mathcal{C}_1(m) \end{array}$$

Si tel est le cas, les invariants de tout couple 1-algbrisable induit $(\mathcal{X}, F)_a$, sont majors par ceux du couple 1'-algbrisable induit $(\chi', f')_a$ tel que

$$(\mathcal{X}, F)_a = \psi^*(\chi', f')_a$$

Or, ce dernier couple est l'clat d'un couple 0-algbrisable, dont les invariants peuvent tre majors, en utilisant la thorie de Khovanski [K], et les ides dveloppes dans les

travaux [IY], [NY].

Remerciements. Je tiens remercier L. Gavrilov qui, par de brves et sincres discussions, a stimul mon intrt pour le sujet des intgrales Abliennes.

Références.

[AL] Andronov A.A., Leontovitch E.A., Gordon I.I. and Maier A.G., *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, (New York: Wiley) (1973), 1-482.

[AV] Arnold V.I., Varchenko A.N. and Gussein-Zade S.M., *Singularities of differentiable mappings II, Monodromy and asymptotics of integrals*, Monographs in Mathematics vol. **82** (Boston: Birkhauser).

[B] Bonnet P., *Description of the module of relatively exact 1-forms modulo a polynomial f on $\mathbb{C}^2$*, Universit de Bourgogne, IMB, Prprint 184 (1999).

[G1] Gavrilov L., *Petrov modules and zeros of Abelian integrals*, Bull. Sci. Maths. **122** (1998), 571-584.

[G2] Gavrilov L., *Abelian integrals related to Morse polynomials and perturbations of plane Hamiltonian vector fields*, Ann. Inst. Fourier **2** (1999).

[G3] Gavrilov L., *The infinitesimal 16th Hilbert problem in the quadratic case*, Inv. Maths. **143** (2001), 449-497.

[G4] Gavrilov L., *Higher order Poincar-Pontryagin functions and iterated path integrals*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse **14** (2005), 677-696.

[I1] Il'Yashenko J.S., *The multiplicity of limit cycles arising from perturbations of the form $w' = P/Q$ of a Hamilton equation in the real and complex domain*, Trudy Sem. Petrovsk. **3** (1978), 49-60 (Engl. transl. Am. Math. Soc. Transl. **118** 191-202).

[I2] Il'Yashenko J.S., *Appearance of limit cycles in perturbation of the equation $dw/dz = -R_z/R_w$ where $R(z,w)$ is a polynomial*, USSR Math. Sbornik **78** (1969), 360-373.

[I3] Il'Yashenko J.S., *An exemple of equation $dw/dz = P_n(z,w)/Q_n(z,w)$ having a countable number of limit cycles and an arbitrary large genre after Petrovski-Landis*, USSR Math. Sbornik **80** (1969), 388-404.

[IY] Il'Yashenko J.S. and Yakovenko S., *Counting real zeros of analytic functions satisfying linear ordinary differential equations*, J. Diff. Equations **126** (1995), no. 1, 87-105.

[K] Khovanski A.G., *Fewnomials*, AMS Publi., Providence, RI, (1991).

[Ma] Mardesic P., *An explicit bound for the multiplicity of zeros of generic Abelian integrals*, Nonlinearity **4** (1991), 845-852.

[Mo] Mourtada A., *Action de drivations irrductibles sur les algbres quasi-rgulires d'Hilbert*, En cours de rvision pour publication.

[NY] Novikov D. and Yakovenko S., *Simple exponential estimate for the number of real zeros of complete Abelian integrals*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), no. 4, 897-927.

[R] Rousseau C., *Bifurcation methods in polynomial systems , Bifurcation and Periodic Orbits of Vector Fields*, ed. D. Schlomiuk (Dordrecht: Kluwer) (1993), 383-428.

[Ro] Roussarie R., *Cyclicit finie des lacets et des points cuspidaux*, Nonlinearity **2** (1989), 73-117.

[V] Varchenko A.N., *Estimate of the number of zeros of Abelian integrals depending on a parameter and limit cycles*, Funct. Anal. **18** (1984), 98-108.

[Y] Yakovenko S., *Complete Abelian integrals as rational envelopes*, Nonlinearity **7** (1994), 1237-1250.